

# DIVERSIÓN (MATEMÁTICA) CON BANDERAS:

★ Enrique Hernando Arnaiz

★ EsTalMat Castilla y León

★ Asoc. CyL de educación matemática

★ Instituto GeoGebra de Castilla y León

XVI Seminario nacional EsTalMat  
Santiago de Compostela 2024



ENRIQUE HERNANDO  
"LOCO DE REMATES"



Yo *presents* yo  
-FUN- WITH FLAGS



# Diversión (matemática) con banderas. EsTalMat Castilla y León

**PREVIO:** ★ Nos remontamos a los orígenes. I Seminario nacional EsTalMat.  
Puerto de la Cruz (16 añitos ya...)

★ ¡¡ Muchas gracias compañeros canarios !!

**Relación de invitados**

- ΦVictorino Pollán Fernández (Galicia)
- ΦMercedes Feijoo Díaz (Galicia)
- ΦEnrique Hernando Arnáiz (Castilla y León)
- ΦJosé Manuel Arranz San José (Castilla y León)
- ΦEugenio Hernández Rodríguez (Madrid)
- ΦJoaquín Hernández Gómez (Madrid)
- ΦM. Mercedes Sánchez Benito (Madrid)
- ΦConcha García Severón (Andalucía)
- ΦPascual Jara Martínez(Andalucía)
- ΦJosé Mº Chacón Iñigo(Andalucía)
- ΦAntonio J. Pérez Jiménez(Andalucía)
- ΦCecilia Valero Revenga (Cantabria)
- ΦMº José Señas Pariente (Cantabria)
- ΦAlejandro Miralles Montolio (Valencia)
- ΦAntonio Ledesma López (Valencia)
- ΦEnrique Freaza Deniz (Canarias)
- ΦAlicia Acosta Ramirez (Canarias)
- ΦRoberto Pascual Martín Pérez (Canarias)
- ΦFernanda Falcón Ramirez (Canarias)
- ΦLuis Cutillas Fernandez (Canarias)
- ΦAntonia Bethancort González (Canarias)
- ΦMarta Berini (Cataluña)
- ΦLourdes Figueiras (Cataluña)
- ΦVictoria Oliu (Cataluña)

**Relación de invitados institucionales.**

- ΦConsejería de Educación. Director General de Ordenación e Innovación Educativa y D. Ceferino Artilles
- ΦRepresentante de la Fundación Vodafone España.
- ΦRAECEPyN D. Alberto Galindo y D. Amable Liñán.
- ΦD. Agustín Álamo Molina.
- ΦSociedad Canaria de Profesores de Matemáticas: Dña. Ana Alicia Pérez
- ΦRepresentante del CSIC

**I Seminario sobre Actividades para Estimular el Talento precoz en matemáticas**

**V Reunión nacional de Estalmat**

**Estalmat Canarias**

**Lugar de Celebración:**  
Hotel Bonanza Palace  
C/ Aceviño, 21 .  
Puerto de la Cruz – Tenerife  
Del 14 al 16 de marzo de 2008

<http://www.estalmat.org>

Diversión (matemática) con banderas. EsTalMat Castilla y León

## PREVIO:

- ★ Taller de introducción/motivación a la modelización para veteranos ( “jubilados” ) del proyecto EsTalMat en CyL...
- ★ Volvemos al “laboratorio de matemáticas” con una actividad curiosa, matemáticas aplicadas de contexto “amable” .
- ★ Trabajamos con proporciones, particiones, polígonos, simetrías...
- ★ Y hablamos un poco de banderas: ¿¿Todas tienen el mismo tamaño??



# EL MUNDO DE LAS BANDERAS:



## Error. Los rectángulos de las banderas no son todos iguales:

“Uno de los errores más habituales con relación al mundo de las banderas es el considerar que se pueden reproducir en un rectángulo común para todas.

Posiblemente esté inducido porque en ciertas enciclopedias y atlas aparecen así\*. Pero lo cierto es que hay veintiún modelos diferentes de proporcionalidad en las dimensiones. Si incluimos las cuadradas, las proporciones varían entre la 11:28 de Qatar y la cuadrada 1:1. Entre estas dos, se encuentran las siguientes: 1:2, 10:19, 5:9, 21:38, 4:7, 10:17, 3:5, 11:18, 5:8, 7:11, 2:3, 7:10, 5:7, 18:25, 8:11, 3:4, 28:37, 4:5 y 13:15”

(Luis Balbuena)

Sdad. Esp. de VEXILOLOGÍA (8 €)

<https://vexilologia.org/poster-de-banderas-del-mundo>



Diversión (matemática) con banderas. EsTaMat Castilla y León

# EL MUNDO DE LAS BANDERAS:



Sdad. Esp. de VEXILOLOGÍA (8 €)

<https://vexilologia.org/poster-de-banderas-del-mundo>



## SITUACIÓN: “AL LÍO”

- ★ Nos ponemos a ello. Banderas: queremos trabajar los distintos conceptos matemáticos involucrados en su diseño y las conexiones entre ellos.
- ★ Producto final 1: cada alumno elegirá una bandera y, con nuestra ayuda, intentará construirla –completamente, es decir sin usar cuadrícula ni otro tipo de guías– con GeoGebra.
- ★ Para ello tendrá que investigar, como decíamos:
  - ★ Proporción altura:base (como se expresa en vexilología... y tiene sentido, como veremos\*).
  - ★ Otras características geométricas presentes.

# SITUACIÓN: "AL LÍO"

**THE WORLD IN 196 FLAGS**

**HOW TO READ**

The visualization shows and explores the flags of all world countries officially recognized by international standards.

All flags are grouped according to the main patterns that characterize their design.

In the right box are shown—in percentages—the most used colors and the total count of flags related to a specific pattern.

\*The total of 196 countries includes 193 UN Member States plus a permanent observer states, Vatican City, Palestine and Taiwan—ex member of the United Nations recognized by 15 states members and by the Vatican.



**COLORS MOST USED**

RED	20%
GREEN	15%
BLACK	14%
PURPLE	12%
WHITE	11.5%
LIGHT BLUE	10%
BLUE	9.5%
YELLOW	7%

**PATTERNS**


TRICOLORE	48
STARS	47
SEAL	29
STRIPES	29
GEOMETRY	4
CROSS	19
BICOLOR	16
CANTON	4
DIAGONAL	17
OTHER DESIGNS	10
CRESCENT	9
CIRCLES	7

# SITUACIÓN: “AL LÍO”

## Bandera de los Estados Unidos






### Datos generales

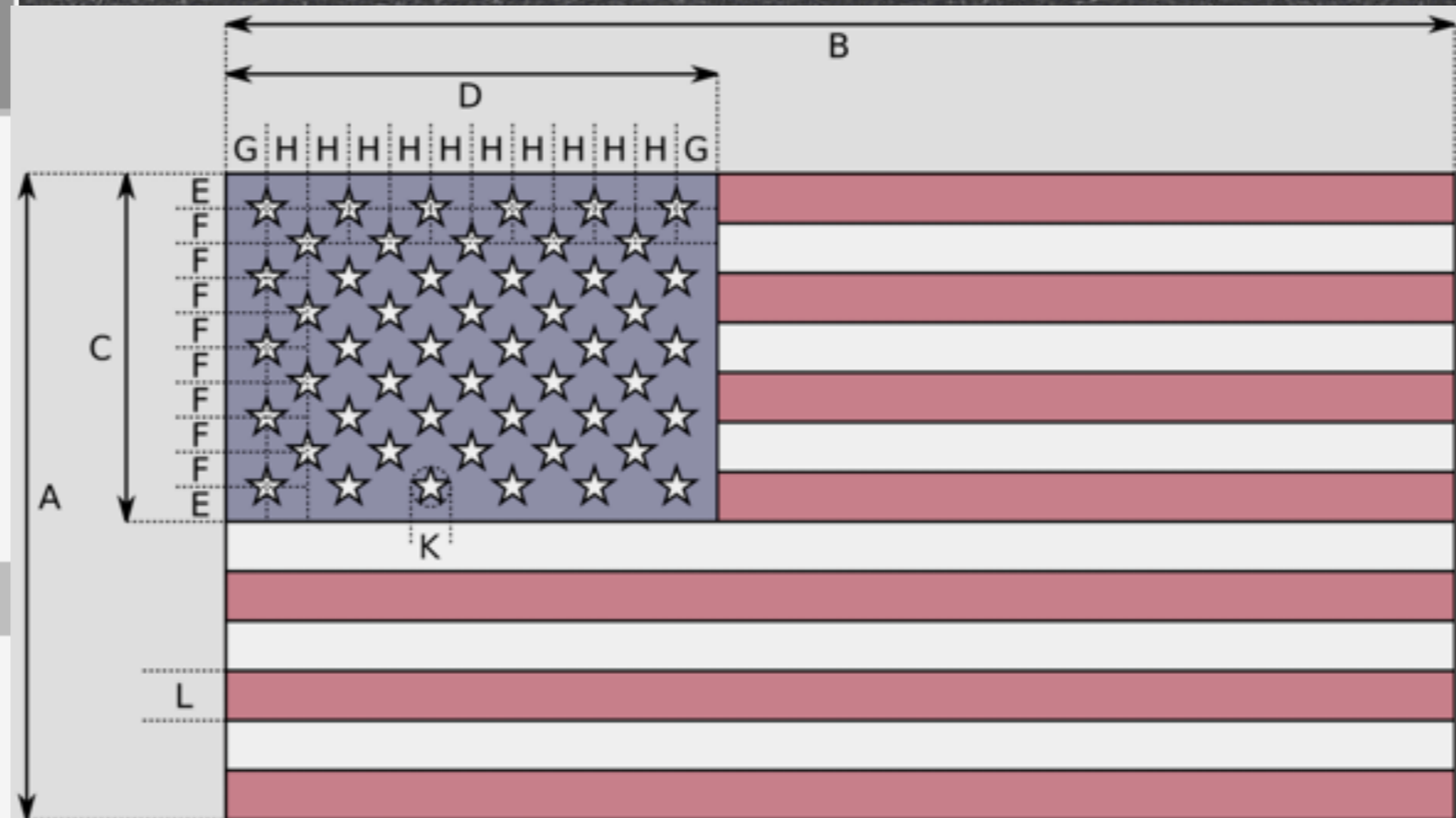
**Uso**  

**Proporción** 10:19

**Adopción** 14 de junio de 1777 (246 años)  
(versión original de 13 estrellas)  
4 de julio de 1960 (63 años)  
(versión actual de 50 estrellas)

**Colores**  Azul  
 Blanco  
 Rojo

**Diseño** Trece franjas horizontales alternadas rojas y blancas, en el cantón, 50 estrellas blancas sobre un fondo azul.



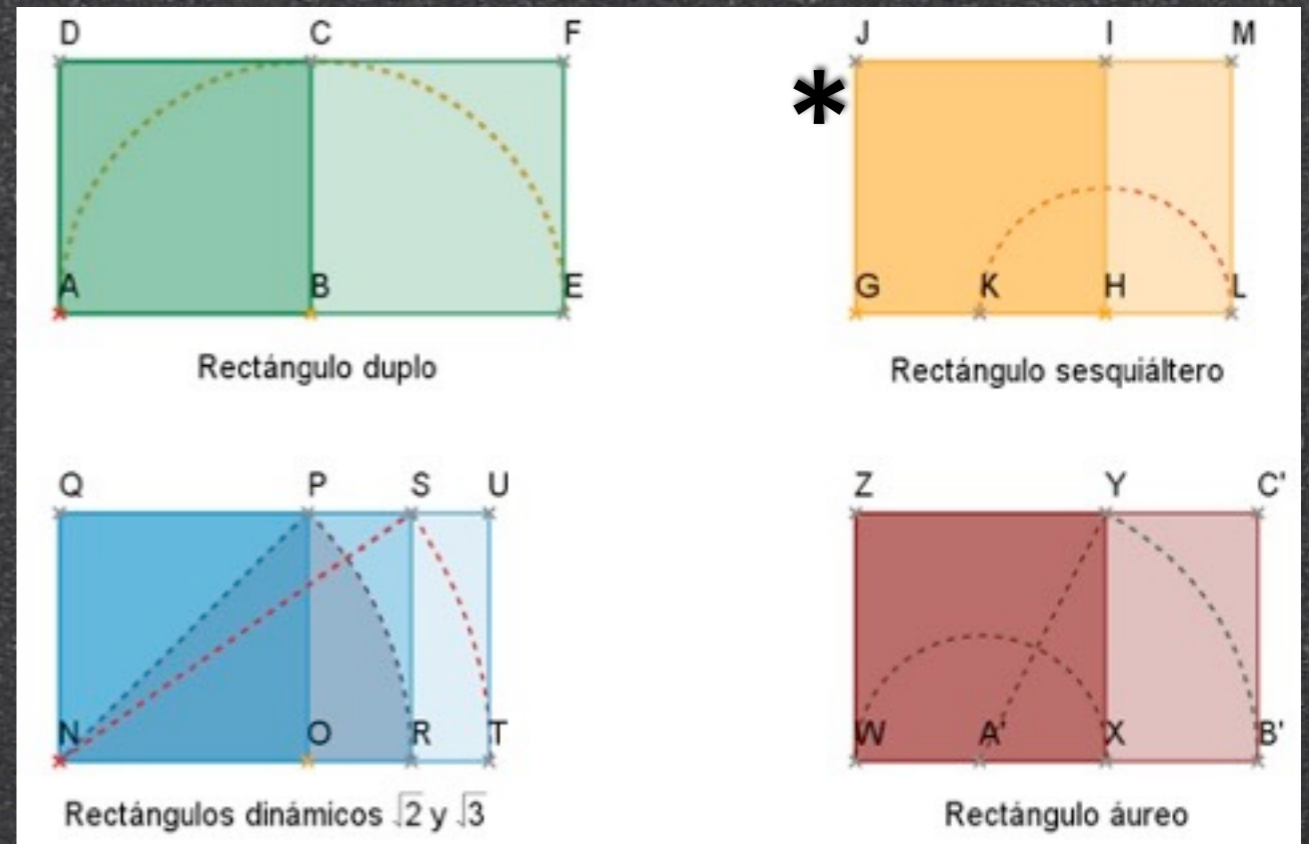
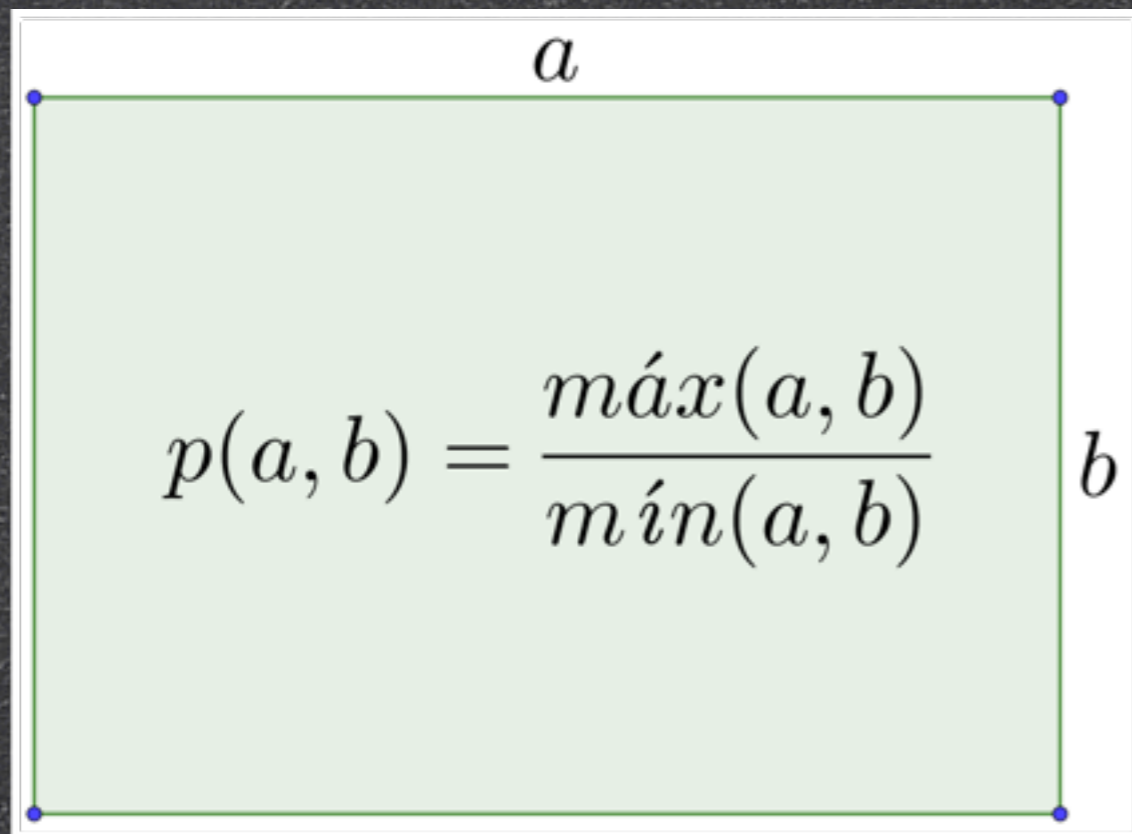
- $A = \text{altura} (1.0)$
- $B = \text{anchura} (1.9)$
- $C = \text{alto del cantón} (0.5385 = A \cdot 7/13)$
- $D = \text{ancho del cantón} (0.76 = B \cdot 2/5)$
- $E = F = \text{espaciado entre líneas de estrellas} (0.0538 = C/10)$
- $G = H = \text{espaciado entre columnas de estrellas} (0.0633 = D/12)$
- $K = \text{diámetro de la estrella} (0.0616 = L \cdot 4/5)$
- $L = \text{ancho de las franjas} (0.0769 = A/13)$





# TRABAJAMOS. ALTO Y ANCHO: PROPORCIÓN

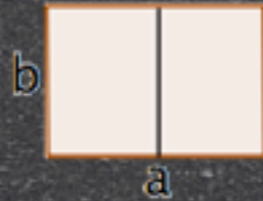
- ★ Trabajamos mates y su historia: Proporciones estáticas vs. dinámicas
  - ★ [Los griegos y las proporciones... GG.](#)
  - ★ Ejercicio GG: Averigua, como los griegos, la proporción de este rectángulo
  - ★ [Lo irracional: Pitágoras y el rectángulo áureo... GG](#)
- ★ Tantos rectángulos como quieras... ¿cómo se construyen?
  - ★ Prop. estáticas (racionales): como el rectángulo “duplo” (1:2) o el “sesquiáltero” (2:3)
  - ★ Dinámicas (irracionales): como el  $\sqrt{2}$  (DIN A#), el  $\sqrt{3}$ , ...
  - ★ A partir del cuadrado y sin cuadrícula: ¿cómo se construye el 3:5? ¿el  $\sqrt{5}$ ?...



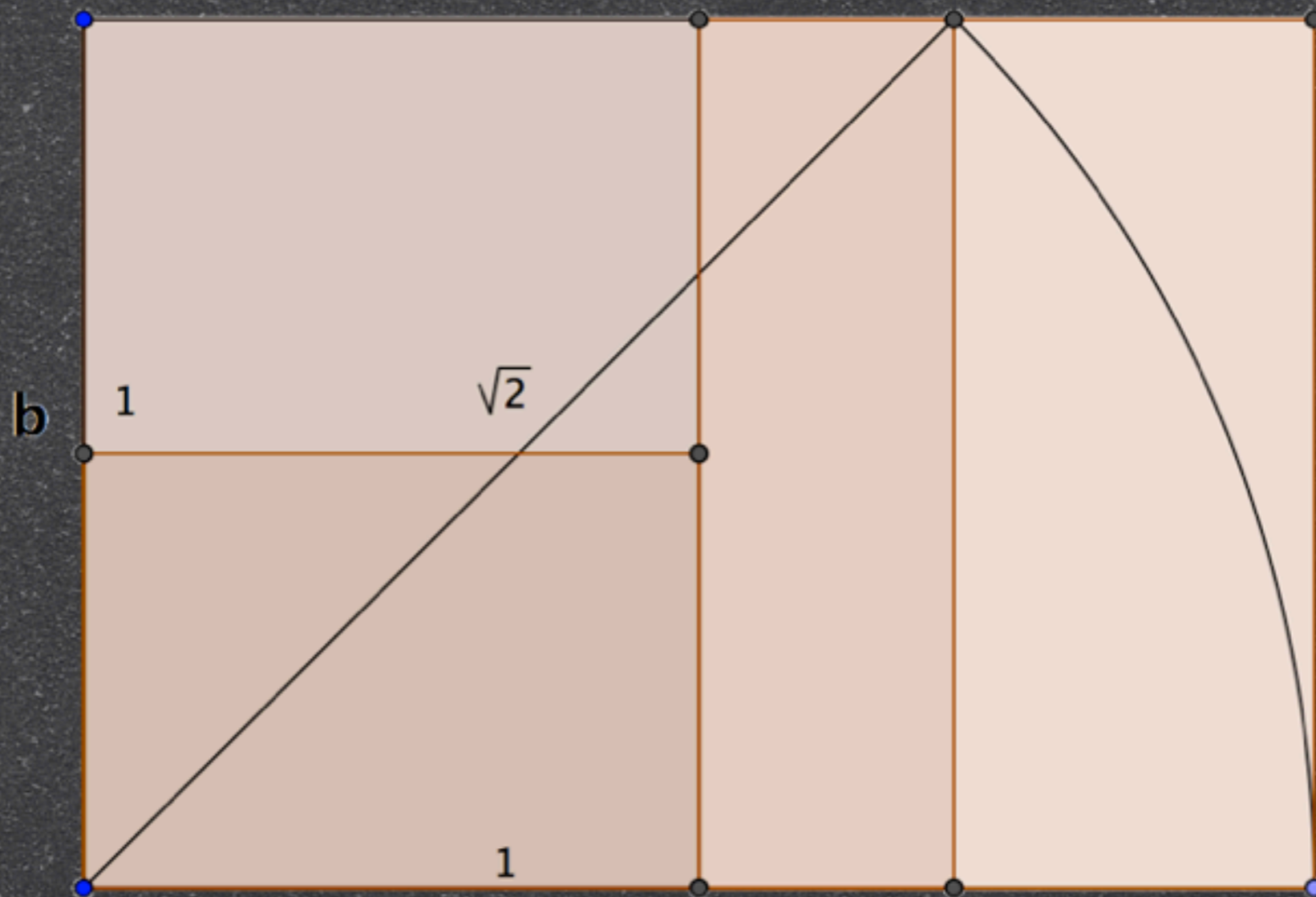
Diversión (matemática) con banderas. EsTaIMat Castilla y León

# ALTO Y ANCHO: PROPORCIÓN (ampliación)

Los "folios" y cuartillas: DIN A4, DIN A3, ..., Din A0 (1 m<sup>2</sup>)



$$\frac{a}{b} = \frac{b}{a/2} \Rightarrow \frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

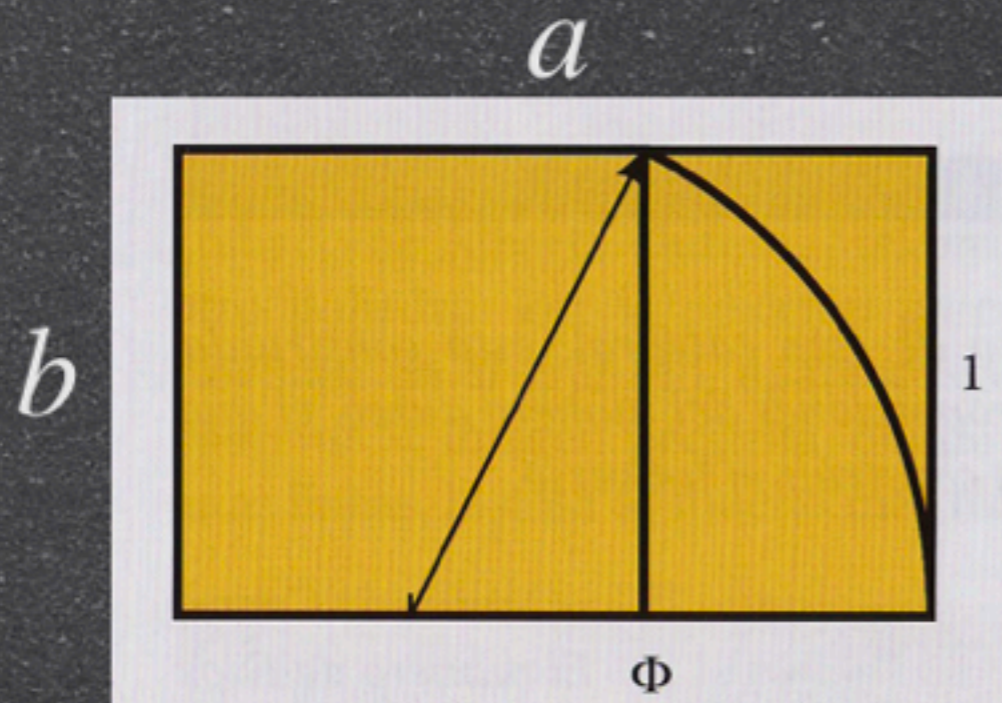


=> ¿Cuál es la proporción del rectángulo que queda si quito un cuadrado máximo?

Diversión (matemática) con banderas. EsTaMat Castilla y León

# ALTO Y ANCHO: PROPORCIÓN (ampliación)

*Rectángulo áureo:*



$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

$$a = x; b = 1$$

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{b}$$

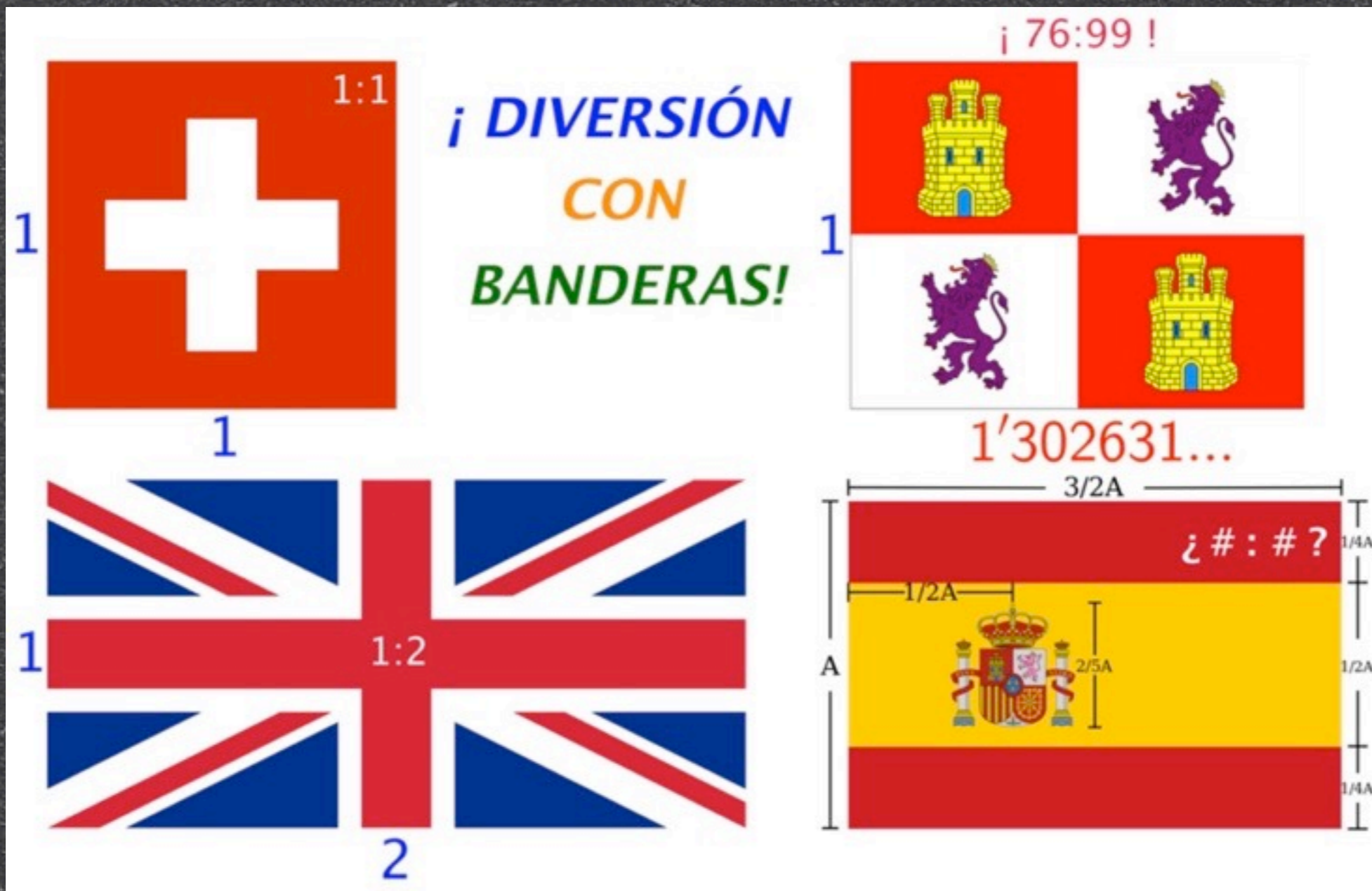
$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi = 1'618...$$



Diversión (matemática) con banderas. EsTaMat Castilla y León

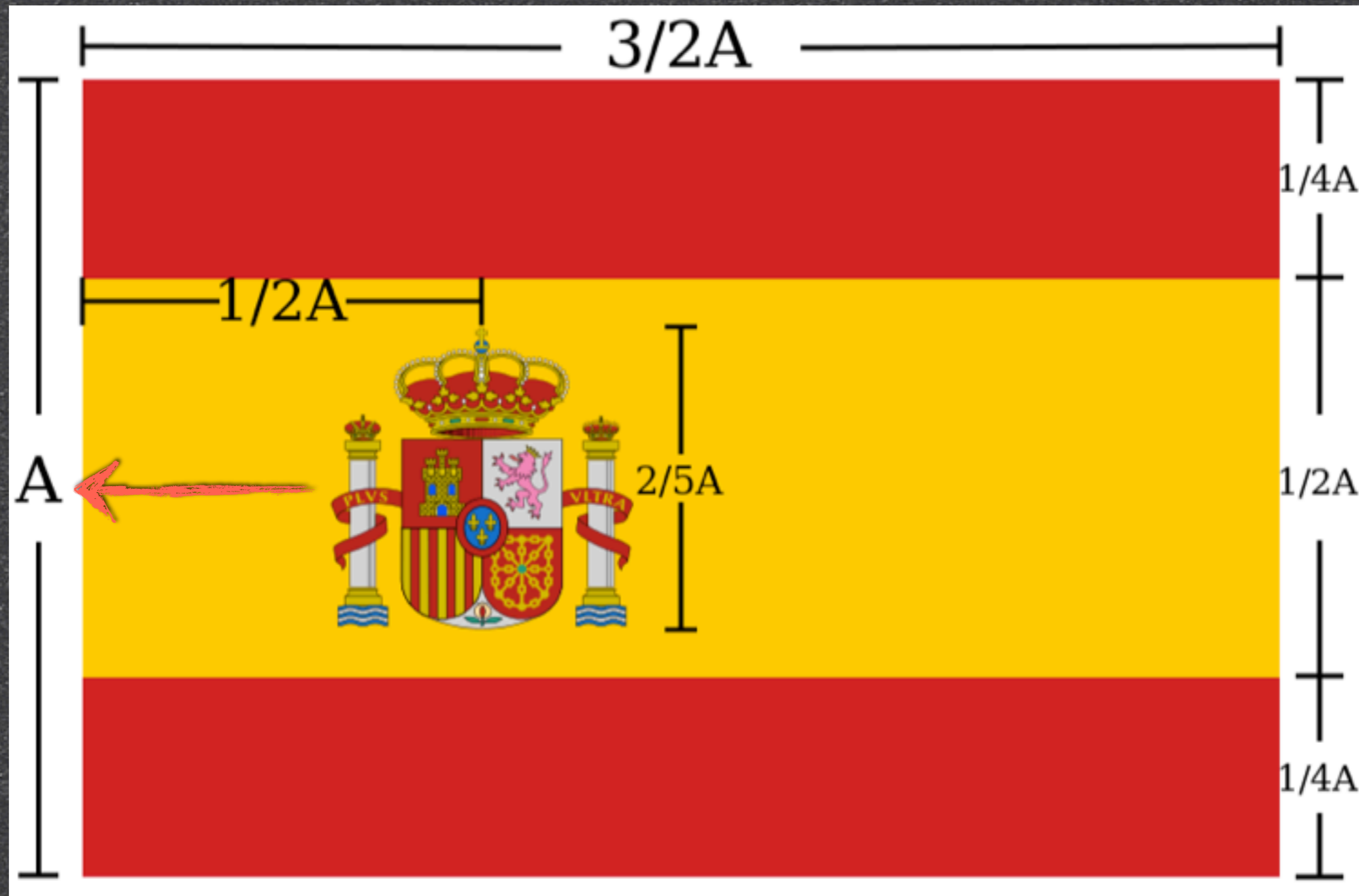
Y... ¿EN LAS BANDERAS?



- ★ ¿¿Cómo se hace la 76:99 desde cuadrado?? (¿Dividir por Tales? ¿Ponderar puntos?)
- ★ ¿Y cuál es la proporción en la bandera de España?

Diversión (matemática) con banderas. EsTaMat Castilla y León

Y... ¿EN LAS BANDERAS?



- ★ ¿¿Cómo se hace la 76:99 desde cuadrado?? (¿Dividir por Tales? ¿Ponderar puntos?)
- ★ ¿Y cuál es la proporción en la bandera de España?

Diversión (matemática) con banderas. EsTaMat Castilla y León

Y...

**Bandera de España**  
Versión Institucional

**Datos generales**

Territorio: España

Uso: [Icono]

Proporción: 2:3

Adopción: 28 de mayo de 1785 (238 años)  
(como pabellón naval)  
13 de octubre de 1843 (180 años)  
(adopción por el Ejército)  
5 de octubre de 1843 (42 años)  
Última modificación de 1981

rojo  
amarillo gualda  
horizontales, roja,  
siendo la amarilla de  
de cada una de las  
drá una altura  
chura de la  
has caras  
nja

A

1/4A  
1/2A

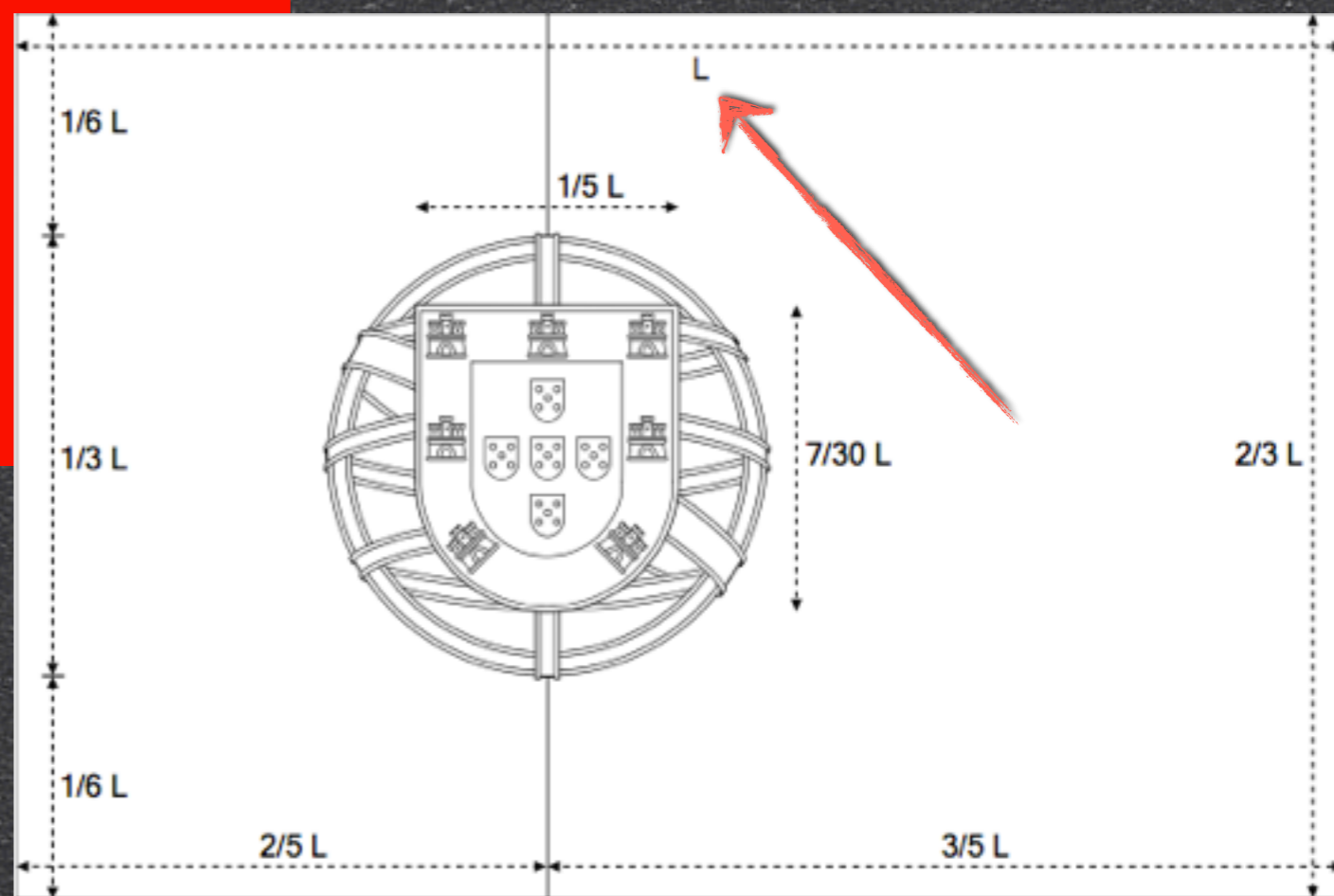
Color	RGB			Colores web	Cuatricromía (CMYK)			
	R	G	B	Código HTML	Cian	Magenta	Amarillo	Negro
Rojo	173	21	25	#AD1519	0%	88%	86%	32%
Amarillo	250	189	0	#FABD00	0%	24%	100%	2%

- ★ ¿¿Cómo se hace la 76:99 desde cuadrado (Ponderar puntos?)
- ★ ¿Y cuál es la proporción en la bandera de España?

Diversión (matemática) con banderas. EsTaMat Castilla y León

## Y... ¿EN LAS BANDERAS?

- ★ ¡Qué cosas más bonitas para construir!... ¿Sabrías? ( [wikip.:](http://wikip.:bandera.de...) bandera de... ¿dónde?)
- ★ Y en cada construcción, ¡una forma de mostrar la proporción<sup>!</sup> entre distancias!

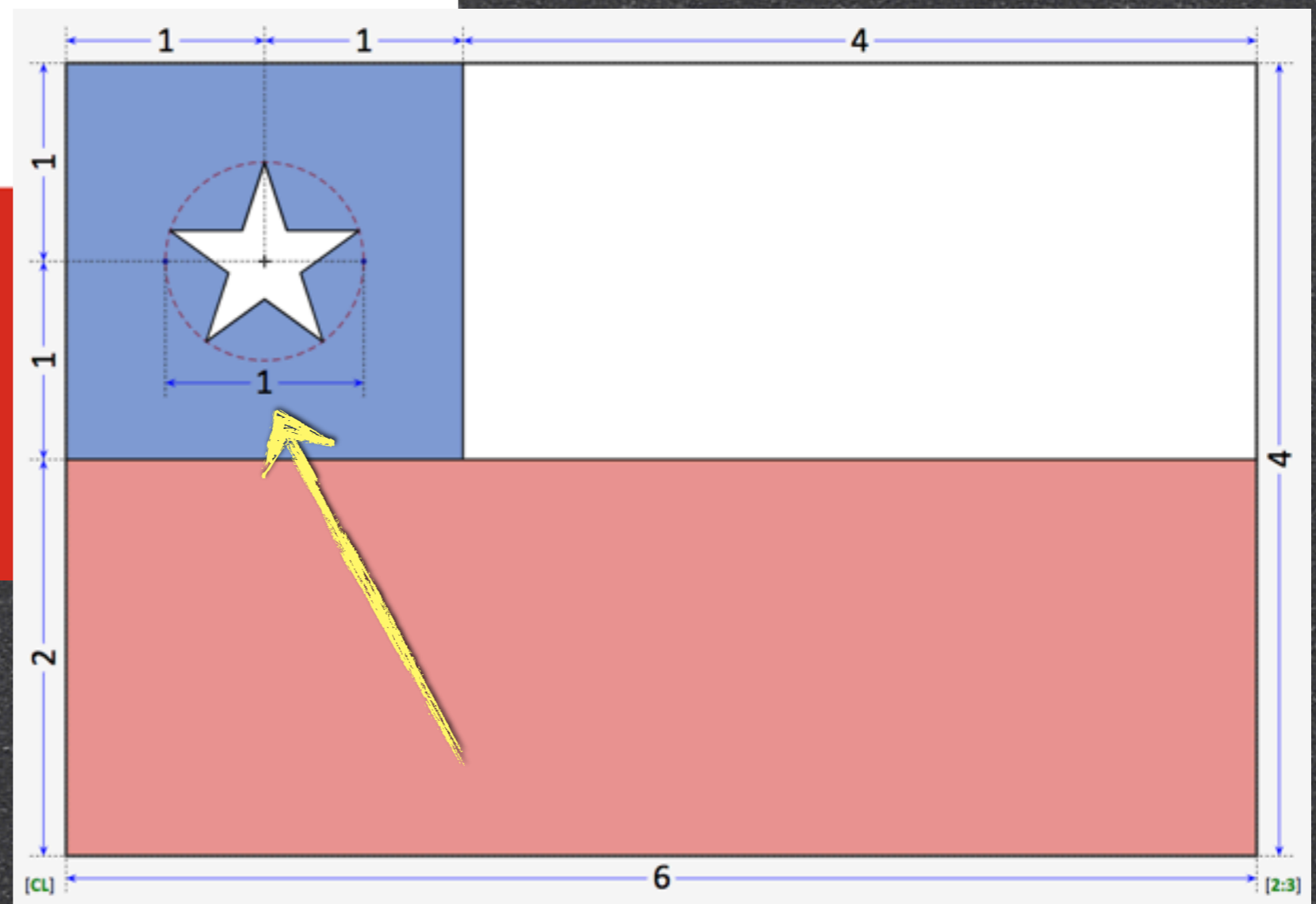
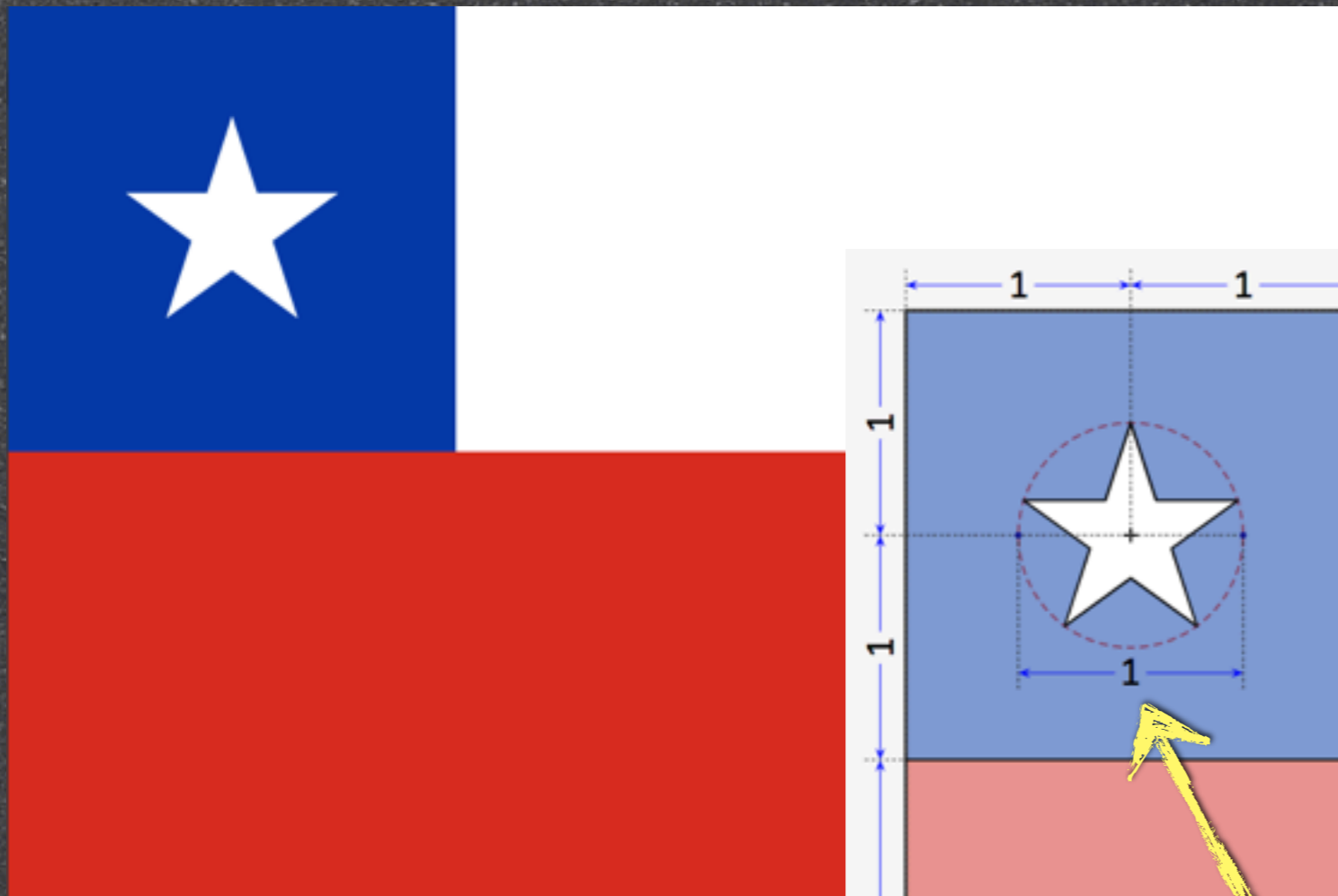




Diversión (matemática) con banderas. EsTaMat Castilla y León

## Y... ¿EN LAS BANDERAS?

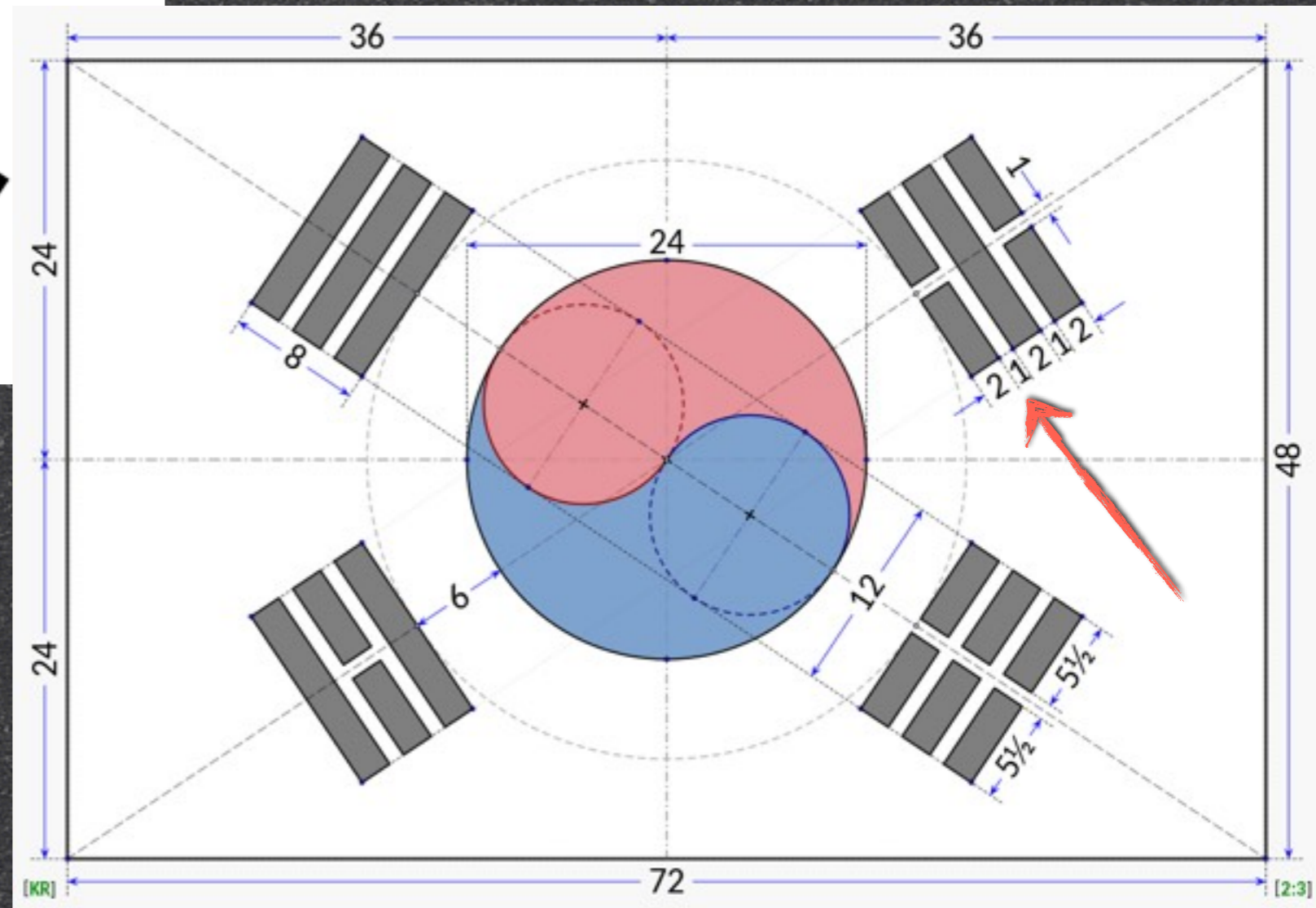
- ★ ¡Qué cosas más bonitas para construir!... ¿Sabrías? ( [wikip.:](#) bandera de... ¿dónde?)
- ★ Y en cada construcción, ¡una forma de mostrar la proporción\*! entre distancias!



Diversión (matemática) con banderas. EsTaMat Castilla y León

## Y... ¿EN LAS BANDERAS?

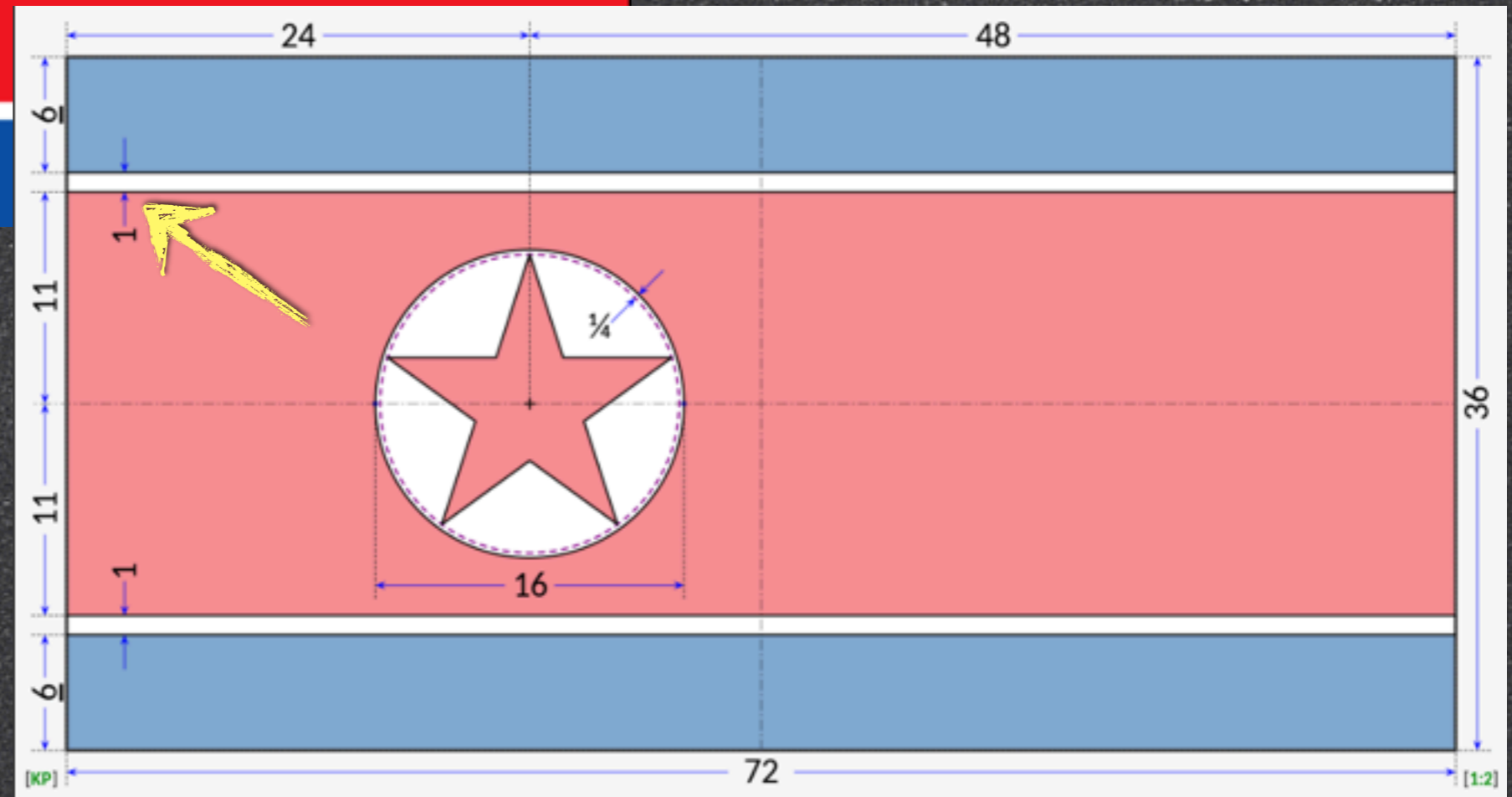
★ ¡Qué cosas más bonitas para construir!... ¿Sabrías? ( wikip.: bandera de... ¿dónde?)



Diversión (matemática) con banderas. EsTaIMat Castilla y León

## Y... ¿EN LAS BANDERAS?

- ★ ¡Qué cosas más bonitas para construir!... ¿Sabrías? ( [wikip.: bandera de...](http://wikip.:bandera.de...) ¿dónde?)



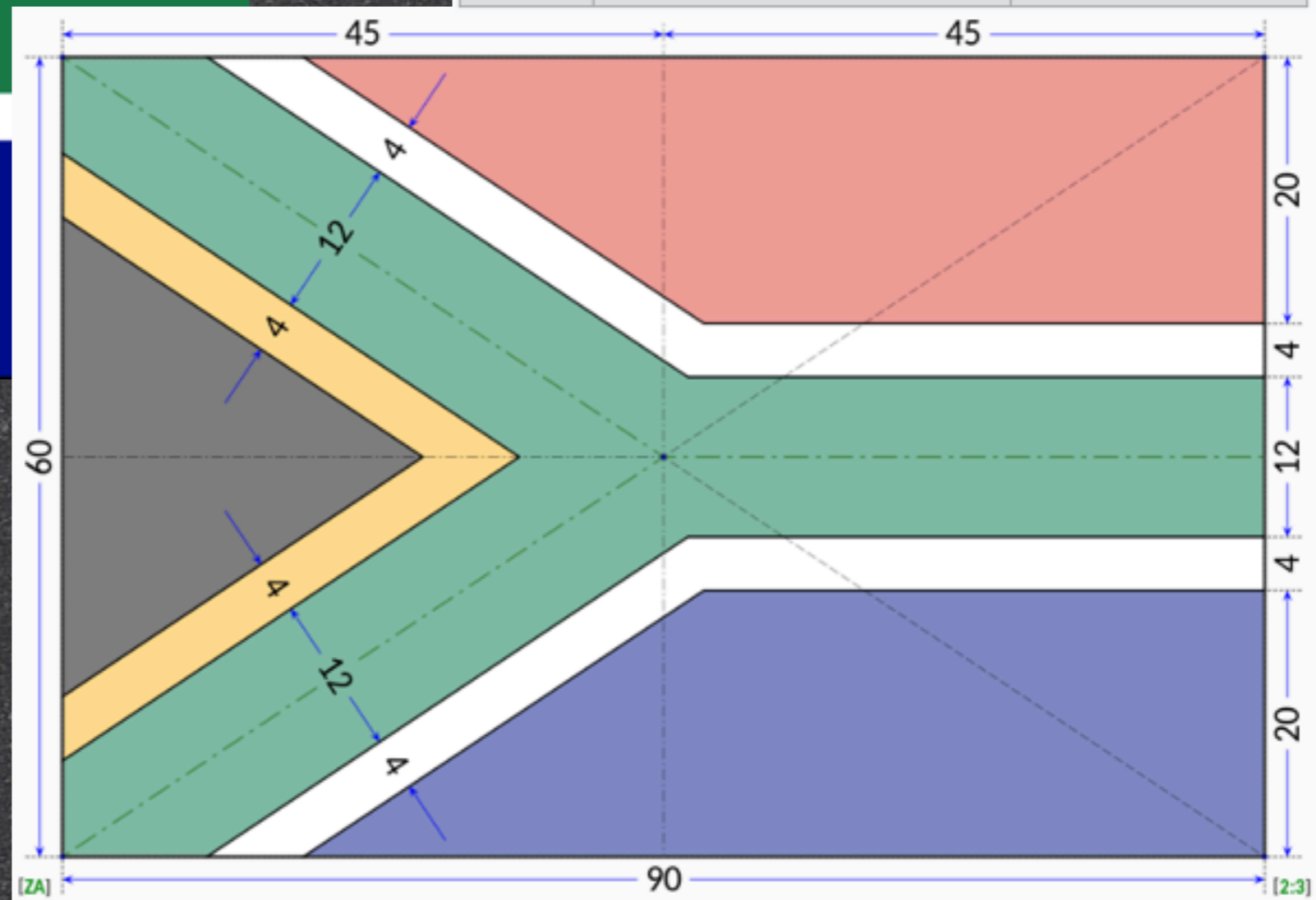
Diversión (matemática) con banderas. EsTaMat Castilla y León

## Y... ¿EN LAS BANDERAS?

★ ¡Qué cosas más bonitas para construir!... ¿Sabrías? ( [wikip.:](http://wikip.:bandera.de...) bandera de... ¿dónde?)



	green	rendered as	RGB	0	119	73	Pantone 3415 C
	yellow	rendered as	RGB	255	184	28	Pantone 1235 C
	red	rendered as	RGB	224	60	49	Pantone 179 C
	blue	rendered as	RGB	0	20	137	Pantone Reflex Blue C
	white	rendered as	RGB	255	255	255	
	black	rendered as	RGB	0	0	0	



★ ¿Faltan datos? ¿Triángulos?  
¿franjas? ¿Vértice trapecios?

★ El triángulo negro... ¿es  
equilátero? RAZONAR  
¡MATEMÁTICAMENTE!

Diversión (matemática) con banderas. EsTaMat Castilla y León

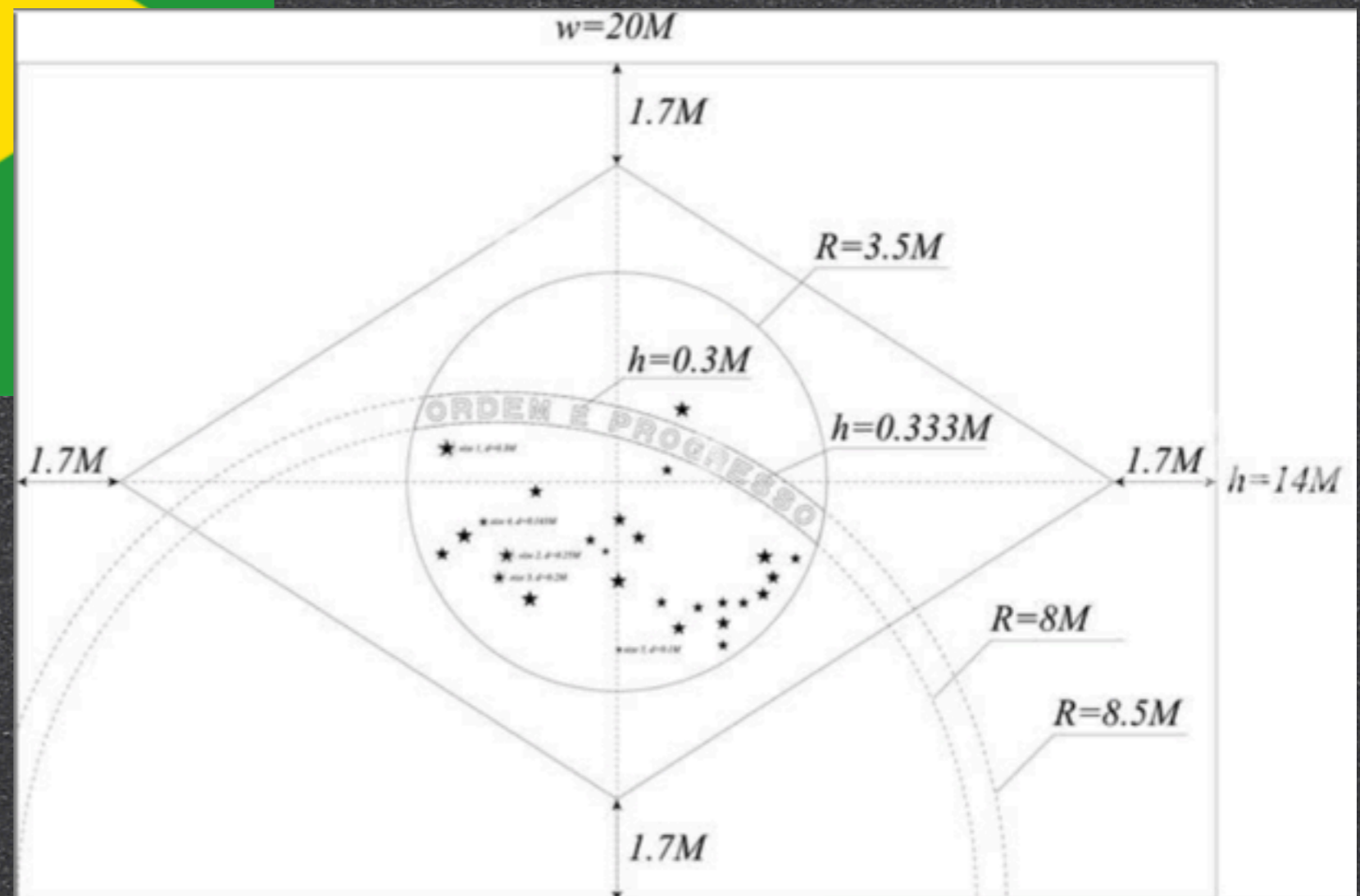
## Y... ¿EN LAS BANDERAS?

★ ¡Qué cosas más bonitas para construir!... ¿Sabrías? ( [wikip.:](http://wikip.:bandera.de...) bandera de... ¿dónde?)



Cada una de las veintisiete estrellas representa uno de los distintos estados y el Distrito Federal

El disco azul de la bandera actual representa el cielo de Río de Janeiro la mañana del 15 de noviembre de 1889 (fecha de la proclamación de la República de Brasil)



Diversión (matemática) con banderas. EsTaMat Castilla y León

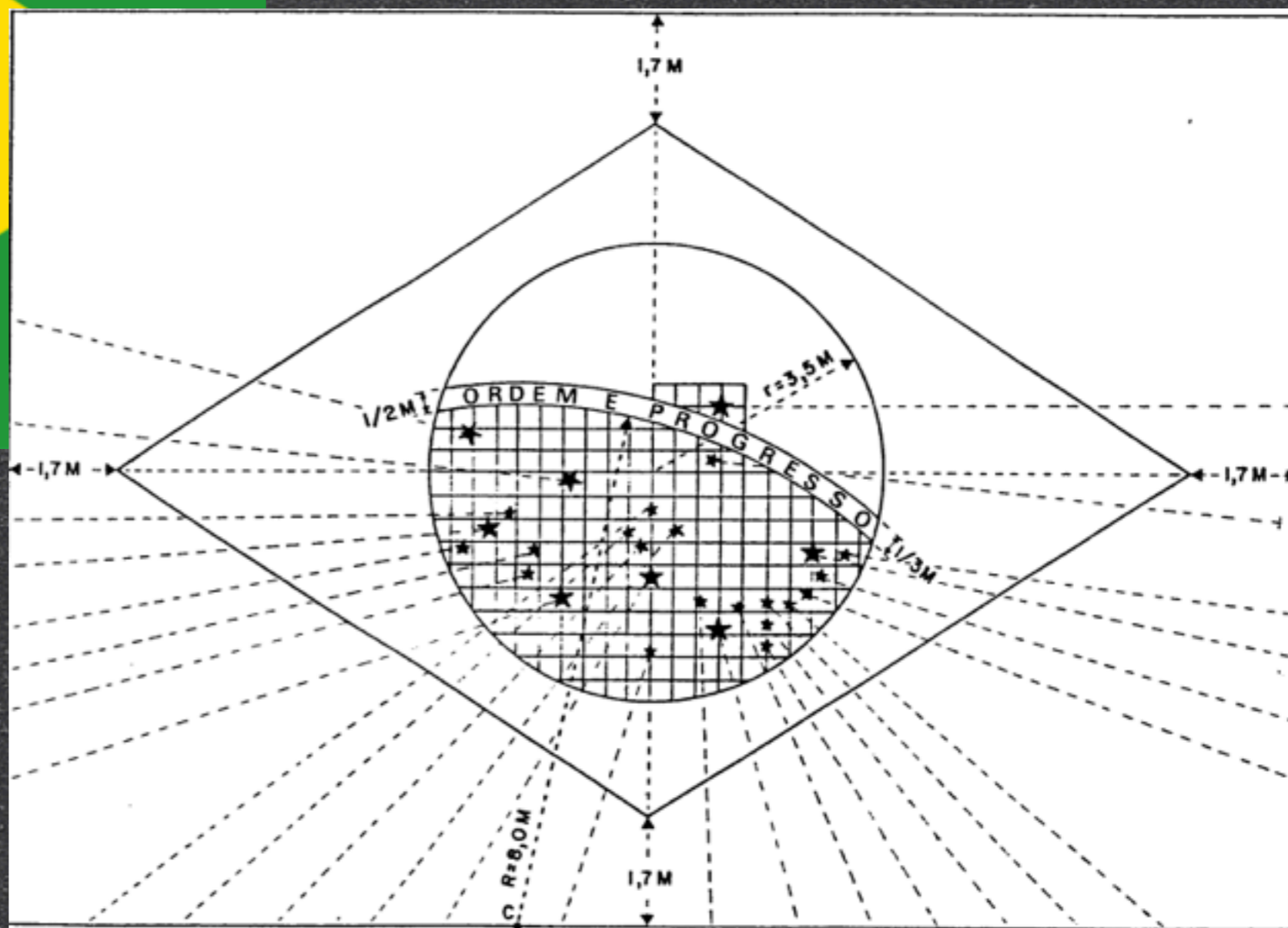
## Y... ¿EN LAS BANDERAS?

★ ¡Qué cosas más bonitas para construir!... ¿Sabrías? ( wikip.: bandera de... ¿dónde?)



Cada una de las veintisiete estrellas representa uno de los distintos estados y el Distrito Federal

El disco azul de la bandera actual representa el cielo de Río de Janeiro la mañana del 15 de noviembre de 1889 (fecha de la proclamación de la República de Brasil)



Diversión (matemática) con banderas. EsTaMat Castilla y León  
Y, CLARO... NO PODÍA DEJAR PASAR LA OCASIÓN:



Tienen proporción 2:3  
(sesquiálteras), pero no he  
conseguido los diseños de  
construcción: ¿¿cómo es la  
banda diagonal?? ni los  
valores RGB

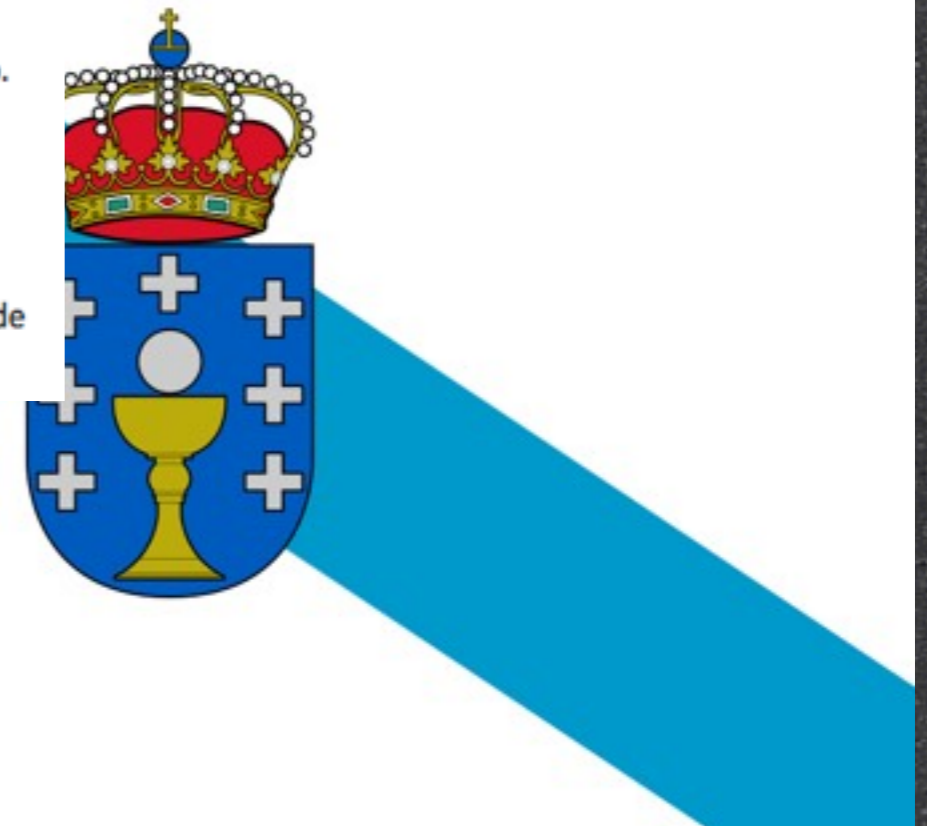


# Diversión (matemática) con banderas. EsTaIMat Castilla y León Y, CLARO... NO PODÍA DEJAR PASAR LA OCASIÓN:



The screenshot shows the official website of the Xunta de Galicia. The header includes the logo and name 'XUNTA DE GALICIA'. A navigation bar contains 'Goberno e institucións', 'Temas', 'eServizos', and 'Transparencia'. The breadcrumb trail is 'Goberno e institucións / Símbolos de Galicia / A bandeira'. The main content area is titled 'SÍMBOLOS DE GALICIA' and 'A bandeira'. A sidebar on the left lists 'Símbolos de Galicia' with sub-items: 'A bandeira', 'O escudo', 'O himno', 'A lingua de Galicia', and 'Medallas de Galicia'. The main text describes the flag's proportions and its design, mentioning the crown and the chalice on the coat of arms.

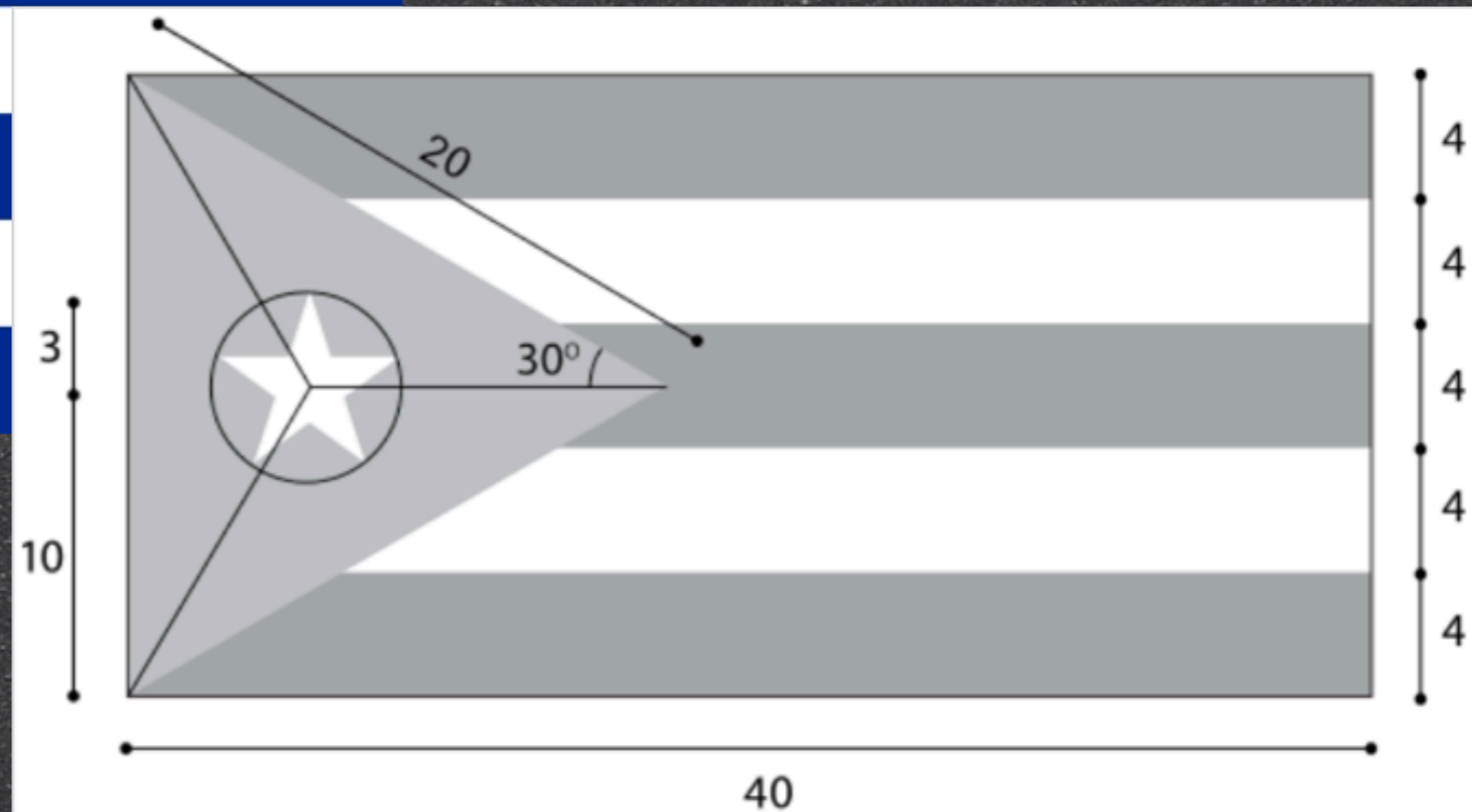
Tienen proporción 2:3 (sesquiálteras), pero no he conseguido los diseños de construcción: ¿¿cómo es la banda diagonal?? ni los valores RGB





# HABRÁ QUE CONSTRUIR ALGUNA (VS. DIBUJARLA ;-)

- ★ El broche final de esta historia. Construir en modo “Geometría” sin cuadrícula y cumpliendo todas las especificaciones la(s) bandera(s) que hayan investigado (no demasiado sencilla) a partir de una altura prefijada (tamaño arbitrario)
- ★ Según el tiempo, me gusta inicialmente proponer/obligar a construir la de Cuba:



- ★ Detalles de la construcción GG...
- ★ Y a partir de aquí... ¡a “pelearse” con la que más les guste!

# HABRÁ QUE CONSTRUIR ALGUNA... ¿MÁS?

- ★ ¡Ah! Pensaba que este era el final de la historia, que todas las banderas tienen proporciones estáticas (rationales)... ¡pero no! ¡Tenemos otro reto constructivo!
- ★ Aunque en el póster de Luis Balbuena en la S. de vexilología (2008) pone que la proporción de la bandera de Togo es 3:5, si nos fiamos de la wiki, desde 1960...

**Bandera de Togo**



**Datos generales**

<b>Proporción</b>	1:φ (1:1,618)
<b>Adopción</b>	27 de abril de 1960
<b>Colores</b>	 Verde  Amarillo  Rojo  Blanco
<b>Diseñador</b>	Paul Ahyi

RAZÓN ÁUREA EN LA BANDERA DE  
**TOGO**  
@geographics2.0



BANDERA TOGOLESA



se dice que dos cantidades  $a$  y  $b$  tienen una razón áurea ( $1:\phi$ ) si

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b} = \phi \quad \therefore 1 + \frac{1}{\phi} = \phi$$

RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN:

$$\phi + 1 = \phi^2$$
$$\phi^2 - \phi - 1 = 0$$
$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA:



Diversión (matemática) con banderas. EsTalMat Castilla y León

(Y, SEGÚN EL TIEMPO/SESIONES DISPONIBLES...)

Luis Balbuena, por ejemplo, propone:

- ★ Describir y averiguar a qué país pertenecen las banderas que se van viendo en el entorno en el que cada cual se mueve (hoteles, restaurantes, instituciones, etc.)
- ★ Hacer un estudio estadístico de la distribución de los colores en las banderas del mundo y en sus distintas partes.
- ★ Estudiar las simetrías que presentan las banderas (y hacer estadística).
- ★ Observar que hay grupos de banderas que tienen los mismos colores. Estudiar si hay alguna razón para ello.
- ★ ¡Que diseñen su propia bandera e, importante, expliquen el por qué de la proporción y de los colores elegidos, de los elementos que pongan, de las simetrías presentes...!



VIDEO resumen proporciones y rectángulos y material en GeoGebra:

- “EL SECRETO MUNDO DE LOS RECTÁNGULOS” Playlist “Loco de reMATES” (Youtube)
- Libro GeoGebra: busca “DIVERSIÓN CON BANDERAS GEOGEBRA” Inst. GeoGebra CyL

En fin... ¿Hay o no matemáticas en las banderas?

“No hay belleza perfecta que no tenga alguna rareza en sus proporciones”

Sir Francis Bacon